Aufgabenpool zur Vorbereitung auf den Eignungstest für die Q-Phase 1 (Aufgaben)

Ganzrationale Funktionen

1.1 Ableitungen

a) $f(x)=5x^4-6x^3+3x^2$
$f'(x)=$
$f''(x)=$
$f'''(x)=$

b) $f(x)=-3x^4-7x^2+3$
$f'(x)=$
$f''(x)=$
$f'''(x)=$

c) $f(x)=\frac{5}{6}x^4-\frac{2}{5}x^3+\frac{1}{3}x^2$

d) $f(x)=-\frac{1}{2}x^5-\frac{3}{4}x^3-\frac{4}{5}x$

e) $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

f) $f(x)=ax^6+bx^4+cx^2+d$

g) $f(x)=0,5ax^5+3,5bx^3-1,5cx$

h) $f(x)=-0,5ax^6+3,5bx^4-7,5cx$

i) $f(x)=4ax^3-0,5x^2-x-7b$

j) $f(x)=ax^8+bx^4+c$

1.2 Kurvendiskussion (Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Symmetrie- &Globalverhalten)

a) $f(x)=-0,5x^4+4x^2-3,5$

b) $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{6}x^2-2x$

c) $f(x)=-\frac{1}{20}x^3+15x$

d) $f(x)=1,5x^4+x^3-9x^2$

e) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

f) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}$

g) $f(x)=x^3-6x^2+3x$

h) $f(x)=1,5x^3-6x$

1.3 Konstruktionsaufgaben

a) Berechnen Sie die ganzrationale Funktion 2. Grades, deren Graph bei $x = 2{,}5$ die x-Achse schneidet und den Hochpunkt $H\left(1|4{,}5\right)$ besitzt.

b) Berechnen Sie die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph den Wendepunkt $W\left(0|4\right)$ besitzt und den Tiefpunkt $T\left(-1|3\right)$ hat.

c) Gesucht ist die achsensymmetrische Funktion 4. Grades, die bei $x = -2$ eine Nullstelle besitzt. Zudem hat sie im Punkt $P\left(1|-6\right)$ eine Tangente, die senkrecht zur Geraden $y = 0{,}5x + 2$ steht.

d) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat Wendepunkt $W\left(1|y\right)$ die Steigung -2 und im Punkt $E\left(0|5\right)$ einen Extrempunkt. Wie lautet die Funktionsgleichung?

e) Welche achsensymmetrische Funktion 4. Grades hat den Wendepunkt $W\left(2|4\right)$ und an der Stelle $x = 2$ die Steigung 16 ?

f) Wie lautet die Funktionsgleichung der zum Ursprung symmetrischen Funktion 3. Grades, die den Hochpunkt $H\left(1|4\right)$ hat?

g) Welche durch den Ursprung laufende Funktion 3. Grades hat bei $x = 1$ ein Minimum und im Punkt $W\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{2}{27}\right)$ einen Wendepunkt?

1.4 Anwendungsaufgaben

1.4.1

Während einer Grippeepidemie sind immer eine bestimmte Anzahl von Personen gerade erkrankt. Täglich erkranken neue Personen, gleichzeitig werden aber auch bereits Erkrankte wieder gesund. Der Verlauf der Zahl der gerade Erkrankten A in Abhängigkeit von der Zeit t nach Ausbruch der Epidemie kann näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit dem Term

$A(t)=\frac{1}{80}\left(t^4-600t^3+33600t^2+640000t\right)$ mit $0\le t\le 80$ und t in Tagen beschrieben werden. Für die weiteren Berechnungen nehmen wir an, dass jeder Erkrankte nach genau 10 Tagen wieder gesund wird.
Bemerkung: Der tatsächliche Verlauf einer Krankheit wird durch eine Exponentialfunktion beschrieben.
Arbeitsaufträge:

a) Berechnen Sie, wie viele Personen am 1.Tag der Epidemie neu erkrankten.

b) Berechnen Sie, wie viele Personen am 10.Tag nach Ausbruch der Epidemie erkrankt waren.

c) Berechnen Sie, an welchem Tag die Anzahl der gerade Erkrankten am stärksten zunahm. Berechnen Sie weiter, um wie viele Personen die Anzahl der Erkrankten an diesem Tag änderte.

d) Berechnen Sie, an welchem Tag die meisten Personen gerade erkrankt waren. Berechnen Sie weiter, wie viele Personen an diesem Tag erkrankt waren.

e) Zeigen Sie, dass nach 80 Tagen die Epidemie vorbei war.

1.4.2

Die über einen längeren Zeitraum erfasste durchschnittliche Anzahl A der momentanen Besucher einer Internetseiten in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitraum von 6.00Uhr morgens bis 20.00Uhr abends kann näherungsweise durch eine Ganzrationale Funktion dritten Grades mit dem Term

$A(t)=-t^3+30t^2-225t+520$ mit $6\le t\le 20$ und t in Stunden beschrieben werden.

a) Berechnen Sie, wie viele Interessenten die Internetseite um 8.00Uhr durchschnittlich besuchen.

b) Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die Anzahl der Besucher zwischen 12.00Uhr und 13.00Uhr verändert.

c) Berechnen Sie, um welche Uhrzeit sich die Anzahl der Besucher durchschnittlich am stärksten vergrößert. Berechnen Sie weiter, um wie viel Besucher mehr die Internetseite aufgesucht wird.

d) Berechnen Sie, um welche Uhrzeit durchschnittlich die meisten Interessenten die Internetseite besuchen. Berechnen Sie weiter, wie viele Interessenten dies durchschnittlich sind.

Exponentialfunktionen

2.1 Ableitungen

a) $f(x)=e^{-2x+2}$
$f'(x)=$
$f''(x)=$
$f'''(x)=$

b) $f(x)=(-0{,}15)e^{-4x+2}$
$f'(x)=$
$f''(x)=$
$f'''(x)=$

c) $f(x)=(3x+5)e^{-3x+4}$

d) $f(x)=(-x-1)e^{7-x}$

e) $f(x)=(-x^2+3x-5)e^{2x-5}$

f) $f(x)=(-0{,}5x^2-1{,}5x-2{,}5)e^{-4x+1}$

g) $f(x)=(-x^2-x-1)e^{-0{,}5x+2}$

h) $f(x)=\left(-2x^2+4x-8\right)e^{0{,}25x+2}$

i) $f(x)=\left(-2\right)e^{-x^2}$

j) $f(x)=e^{2x^2-x}$

k) $f(x)=ae^{bx}$

l) $f(x)=e^{x}$

2.2 Kurvendiskussion (Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Symmetrie- &Globalverhalten)

a) $f(x)=\left(8x\right)e^{-x}$

b) $f(x)=e^{-x^2+4x}$

c) $f(x)=\left(2x\right)e^{1-x}$

d) $f(x)=\left(x+2\right)e^{1-4x}$

e) $f(x)=\left(x\right)e^{1-x^2}$

f) $f(x)=e^{1-x^2}$

g) $f(x)=(x^2-4)e^{-2x}$

h) $f(x)=(2x-4)e^{0{,}5x}$

2.3 Konstruktionsaufgaben

a) Berechnen Sie die Funktion der Art $f(x)=ae^{bx}$, so dass die Punkte $A(0|3)$ und $B(5|2)$ auf dem Graphen liegen.

b) Eine Funktion der Form $f(x)=ae^{bx}$ ist gesucht. Die Gerade $y=2x-1$ ist Tangente an der Stelle $x=1$. Berechnen Sie a und b.

c) Gesucht ist eine Funktion in der Form $f(x)=ae^{bx}$, deren Graph im Punkt $P(2|1)$ die Steigung 3 hat.

d) Berechnen Sie die Funktion der Art $f(x)=ae^{bx}$, so dass die Punkte $A(0|1)$ und $B(1|3)$ auf dem Graphen liegen.

e) Die Punkte $P(-2|20)$ und $Q(3|0,625)$ liegen auf dem Graphen einer Exponentialfunktion der Art $f(x)=ae^{bx}$. Berechnen Sie a und b.

f) Die Funktion $f(x)=(a+1)e^{-bx}$ geht durch den Punkt $R(1|2)$ und hat dort die Steigung $-2e$. Um welche Funktion handelt es sich? *(hoher Schwierigkeitsgrad)*

2.4 Verständnisfragen

Wie müsste die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion unter folgenden Bedingungen aussehen:

a) Alle 15 min verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien.

b) Alle 30 min verdreifacht sich die Anzahl der Bakterien.

c) Wir beginnen mit der Beobachtung, wenn schon n_0 = 1.000.000.000 Bakterien vorhanden sind und die Anzahl sich alle 45 min verfünffacht.

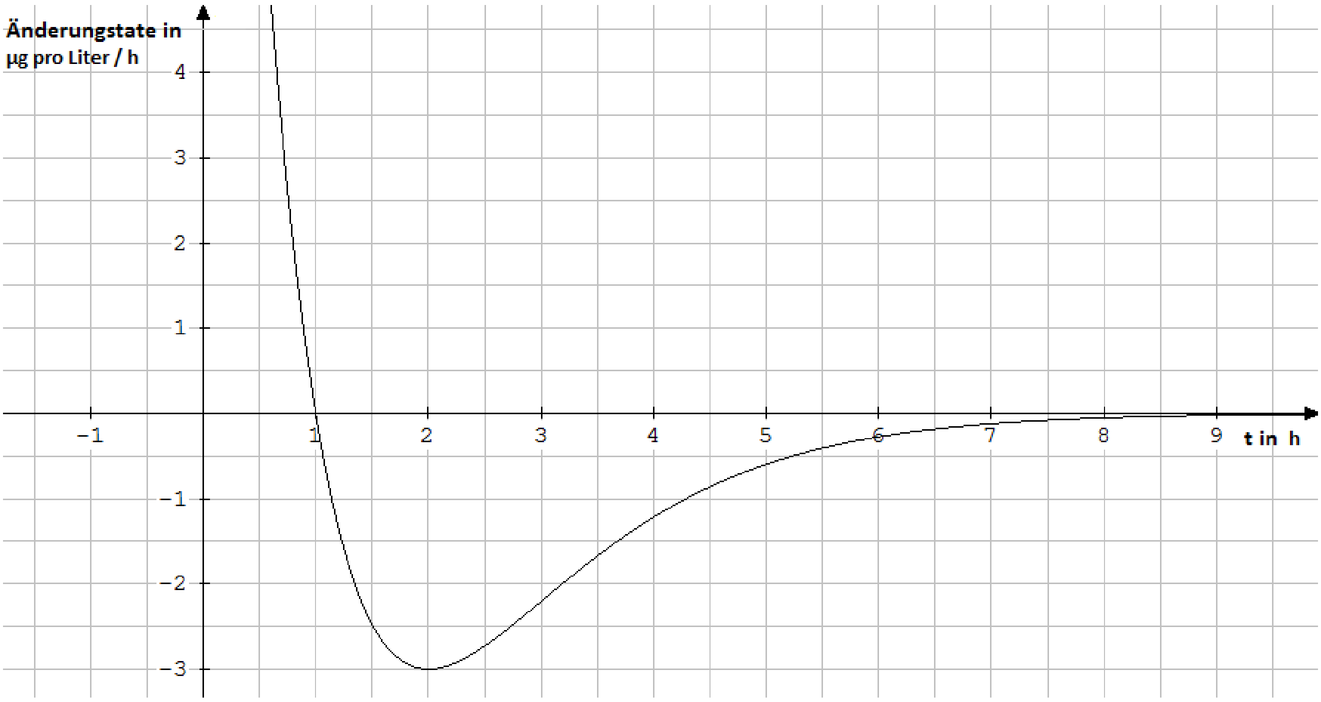
d) Bei Beobachtungsbeginn sind n_0 = 100 000 Bakterien vorhanden und alle 45 min nimmt die Anzahl der Bakterien um den Faktor e = 2,718 zu.

e) Alle 10 min. halbiert sich die Anzahl n_0.

2.5 Textaufgaben

2.5.1 Arzneimittelkonzentration

Bei einer Arznei, z.B. einer Tablette, steht die Wirkung (z.B. Schmerzlinderung o.ä.) in direktem Zusammenhang mit der Konzentration des in der Arznei enthaltenen Wirkstoffes im Blut, d.h., bei hoher Konzentration des Wirkstoffes verspürt der Patient eine intensive Wirkung. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut wird in µg pro Liter angegeben. Die nachfolgende Graphik zeigt mit $f'(x) = (-3x+3)e^{2-x}$ die Änderungsrate der Konzentration in µg pro Liter je Stunde in Abhängigkeit von der Zeit t in h. Dabei ist t die Zeit in h seit Beginn der Einnahme (x = 0).



a) Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen die Wirksamkeit zunimmt und die Zeitintervalle, in denen die Wirksamkeit abnimmt. Begründen Sie Ihre Aussagen.

b) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Wirkstoffes am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.

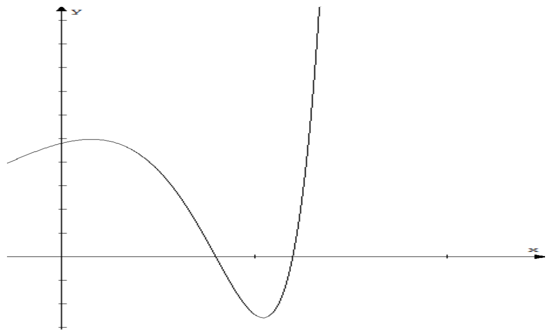
c) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Abnahme der Konzentration am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.

d) Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Wirksamkeit der Arznei.

e) Erläutern Sie, was die dazugehörige Funktion $f(x) = (3x)e^{2-x}$ in diesem Zusammenhang angibt.

2.5.2 Stausee

Ein Stausee ändert seine Wassermenge. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt. Die Zulaufratenfunktion ist gegeben durch $f(x)=\left(x^2-10x+24\right)e^{0,5x}$ .Der Graph von f ist hier abgebildet.



Dabei wird x in Tagen und z(x) in tausend Kubikmeter pro Tag angegeben. Betrachtet wird das Intervall [0;6,5], d.h.: $0\leq x\leq 6,5$.

Hinweis: Eine negative Zulaufrate bedeutet, dass Wasser aus dem Stausee herausläuft.

a) Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen das Wasser weder ein- noch abfließt. Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft.

b) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Zulaufrate im betrachteten Intervall maximal ist.

c) Ermitteln Sie, welche Aussagen über die Änderung der Wassermenge zum Zeitpunkt $x=5$ möglich sind.

Formelblatt für den Vorkurs und Einführungsphase

Lineare Funktionen	Quadratische Funktionen
$f(x) = mx + b$ mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$ Scheitelpunktform: $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ Faktorform: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Quadratische Gleichungen

Normalform: $0 = x^2 + px + q$ pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	Diskriminante der pq-Form: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ $D > 0 \Rightarrow 2$ Lösungen $D = 0 \Rightarrow 1$ Lösung $D < 0 \Rightarrow$ keine Lösungen

Binomische Formeln

I $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	II $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	III $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Wurzel- und Potenzgesetze

1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	***2*** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	***3*** $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	***4*** $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
5 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	***6*** $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	***7*** $a^0 = 1$	***8*** $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
9 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	***10*** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	***11*** $(\sqrt{a})^2 = a$	***12*** $\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$
13 $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$	***14*** $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}}$	***15*** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	***16*** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Logarithmengesetze

1 $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$	***2*** $u, v > 0$ $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$	***3*** $\log_a u^r = r \cdot \log_a u$	***4*** $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$

Differenzialrechnung

Differenzialquotient (1. Ableitung) von f an der Stelle x_0	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
1. Ableitung von f (Ableitungsfunktion)	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

Differenziationsregeln $u = u(x)$ $v = v(x)$ $c \in IR$

Faktorregel	$y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$	Produktregel	$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Summenregel	$y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$	Kettenregel	$y = f(g(x))$ bzw. $y = f(u)$ mit $u = g(x)$ $\Rightarrow y' = f'(u) \cdot g'(x)$

Aufgabenpool zur Vorbereitung auf den Eignungstest für die Q-Phase 1 (Lösungen)

Ganzrationale Funktionen

1.1 Ableitungen

a)
$$f(x) = 5x^4 - 6x^3 + 3x^2$$
$$f'(x) = 20x^3 - 18x^2 + 6x$$
$$f''(x) = 60x^2 - 36x + 6$$
$$f'''(x) = 120x - 36$$

b)
$$f(x) = -3x^4 - 7x^2 + 3$$
$$f'(x) = -12x^3 - 14x$$
$$f''(x) = -36x^2 - 14$$
$$f'''(x) = -72x$$

c)
$$f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{3}x^2$$
$$f'(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{2}{3}x$$
$$f''(x) = 10x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{2}{3}$$
$$f'''(x) = 20x - \frac{12}{5}$$

d)
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{4}{5}x$$
$$f'(x) = -\frac{5}{2}x^4 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{4}{5}$$
$$f''(x) = -10x^2 - \frac{9}{2}x$$
$$f'''(x) = -20x - \frac{9}{2}$$

e)
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$
$$f'''(x) = 24ax + 6b$$

f)
$$f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$$
$$f'(x) = 6ax^5 + 4bx^3 + 2cx$$
$$f''(x) = 30ax^4 + 12bx^2 + 2c$$
$$f'''(x) = 120ax^3 + 24bx$$

g)
$$f(x) = 0,5ax^5 + 3,5bx^3 - 1,5cx$$
$$f'(x) = 2,5ax^4 + 10,5bx^2 - 1,5c$$
$$f''(x) = 10ax^3 + 21bx$$
$$f'''(x) = 30ax^2 + 21b$$

h)
$$f(x) = -0,5ax^4 + 3,5bx^2 - 7,5cx$$
$$f'(x) = -2ax^3 + 7bx - 7,5c$$
$$f''(x) = -6ax^2 + 7b$$
$$f'''(x) = -12ax$$

i)
$$f(x) = 4ax^3 - 0,5x^2 - x - 7b$$
$$f'(x) = 12ax^2 - x - 1$$
$$f''(x) = 24ax - 1$$
$$f'''(x) = 24a$$

j)
$$f(x) = ax^8 + bx^4 + c$$
$$f'(x) = 8ax^7 + 4bx^3$$
$$f''(x) = 56ax^6 + 12bx^2$$
$$f'''(x) = 336ax^5 + 24bx$$

1.2 Kurvendiskussion (Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Symmetrie- &Globalverhalten)

a)

$$f(x) = -0{,}5x^4 + 4x^2 - 3{,}5$$

$$S_Y\left(0 \middle| -3{,}5\right) \quad x_{N1,2} = \pm 1 \quad x_{N3,4} = \pm\sqrt{7}$$

$$H_1\left(-2 \middle| 4{,}5\right) \quad T_1\left(0 \middle| -3{,}5\right) \quad H_2\left(2 \middle| 4{,}5\right)$$

$$W_1\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| \frac{17}{18}\right) \quad W_2\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| \frac{17}{18}\right)$$

symmetrisch zur y – Achse

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x$$

$$S_Y\left(0 \middle| 0\right) \quad x_{N1} = 0 \quad x_{N2} = -3{,}56 \quad x_{N3} = 5{,}06$$

$$H_1\left(-2 \middle| \frac{22}{9}\right) \quad T_1\left(3 \middle| -4{,}5\right)$$

$$W_1\left(0{,}5 \middle| -\frac{37}{36}\right)$$

keine Symmetrie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

c)

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^3 + 15x$$

$$S_Y\left(0 \middle| 0\right) \quad x_{N1} = 0$$

$$T_1\left(-10 \middle| -100\right) \quad H_1\left(10 \middle| 100\right)$$

$$W_1\left(0 \middle| 0\right)$$

symmetrisch zum Ursprung

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

d)

$$f(x) = 1{,}5x^4 + x^3 - 9x^2$$

$$S_Y\left(0 \middle| -3{,}5\right) \quad x_{N1} = 0 \quad x_{N2} = -2{,}81 \quad x_{N3} = 2{,}14$$

$$T_1\left(-2 \middle| -20\right) \quad H_1\left(0 \middle| 0\right) \quad T_2\left(1{,}5 \middle| -\frac{297}{32}\right)$$

$$W_1\left(-1{,}18 \middle| -11{,}28\right) \quad W_2\left(0{,}85 \middle| -5{,}08\right)$$

keine Symmetrie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

e)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$S_Y\left(0 \middle| 0\right) \quad x_{N1} = 0 \quad x_{N2} = 3$$

$$T_1\left(1 \middle| 4\right) \quad H_1\left(3 \middle| 0\right)$$

$$W_1\left(2 \middle| 2\right)$$

keine Symmetrie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

f)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$$

$$S_Y\left(0 \middle| -2{,}25\right) \quad x_{N1} = 0 \quad x_{N2} = -3 \quad x_{N2} = 3$$

$$T_1\left(-2 \middle| -6{,}25\right) \quad H_1\left(0 \middle| -2{,}25\right) \quad T_2\left(2 \middle| -6{,}25\right)$$

$$W_1\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| -\frac{161}{36}\right) \quad W_2\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| -\frac{161}{36}\right)$$

symmetrisch zur y – Achse

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

g)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$$

$$S_Y\left(0 \middle| 0\right) \quad x_{N1} = 0 \quad x_{N2} = 0{,}55 \quad x_{N2} = 5{,}45$$

$$H_1\left(0{,}27 \middle| 0{,}39\right) \quad T_1\left(3{,}73 \middle| -20{,}39\right)$$

$$W_1\left(-2 \middle| -10\right)$$

keine Symmetrie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

h)

$$f(x) = 1{,}5x^3 - 6x$$

$$S_Y\left(0 \middle| 0\right) \quad x_{N1} = 0 \quad x_{N1} = 2 \quad x_{N1} = -2$$

$$H_1\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| -4{,}62\right) \quad T_1\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| -4{,}62\right)$$

$$W_1\left(0 \middle| 0\right)$$

symmetrisch zum Ursprung

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

1.3 Konstruktionsaufgaben

a) Berechnen Sie die ganzrationale Funktion 2. Grades, deren Graph bei $x = 2{,}5$ die x-Achse schneidet und den Hochpunkt $H\left(1|4{,}5\right)$ besitzt.

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 2{,}5$$

b) Berechnen Sie die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph den Wendepunkt $W\left(0|4\right)$ besitzt und den Tiefpunkt $T\left(-1|3\right)$ hat.

$$f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x + 4$$

c) Gesucht ist die achsensymmetrische Funktion 4. Grades, die bei $x = -2$ eine Nullstelle besitzt. Zudem hat sie im Punkt $P\left(1|-6\right)$ eine Tangente, die senkrecht zur Geraden $y = 0{,}5x + 2$ steht.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

d) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat Wendepunkt $W\left(1|y\right)$ die Steigung -2 und im Punkt $E\left(0|5\right)$ einen Extrempunkt. Wie lautet die Funktionsgleichung?

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5$$

e) Welche achsensymmetrische Funktion 4. Grades hat den Wendepunkt $W\left(2|4\right)$ und an der Stelle $x = 2$ die Steigung 16 ?

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 6x^2 - 16$$

f) Wie lautet die Funktionsgleichung der zum Ursprung symmetrischen Funktion 3. Grades, die den Hochpunkt $H\left(1|4\right)$ hat?

$$f(x) = -2x^3 + 6x$$

g) Welche durch den Ursprung laufende Funktion 3. Grades hat bei $x = 1$ ein Minimum und im Punkt $W\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{2}{27}\right)$ einen Wendepunkt?

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

1.4 Anwendungsaufgaben

1.4.1

Während einer Grippeepidemie sind immer eine bestimmte Anzahl von Personen gerade erkrankt. Täglich erkranken neue Personen, gleichzeitig werden aber auch bereits Erkrankte wieder gesund. Der Verlauf der Zahl der gerade Erkrankten A in Abhängigkeit von der Zeit t nach Ausbruch der Epidemie kann näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit dem Term

$A(t) = \frac{1}{80}\left(t^4 - 600t^3 + 33600t^2 + 640000t\right)$ mit $0 \le t \le 80$ und t in Tagen beschrieben werden. Für die weiteren Berechnungen nehmen wir an, dass jeder Erkrankte nach genau 10 Tagen wieder gesund wird.
Bemerkung: Der tatsächliche Verlauf einer Krankheit wird durch eine Exponentialfunktion beschrieben.
Arbeitsaufträge:

a) Berechnen Sie, wie viele Personen am 1.Tag der Epidemie neu erkrankten. $A(1) = 8412{,}51$

b) Berechnen Sie, wie viele Personen am 10.Tag nach Ausbruch der Epidemie erkrankt waren.
$A(10) = 114625$

c) Berechnen Sie, an welchem Tag die Anzahl der gerade Erkrankten am stärksten zunahm. Berechnen Sie weiter, um wie viele Personen die Anzahl der Erkrankten an diesem Tag änderte.

$A''(t) = 0$
$t_1 = 20 \qquad A'(20) = 16200 \rightarrow \textit{Zunahme um } 16.200 \textit{ Menschen pro Tag}$
$t_2 = 280 \qquad A'(280) = \text{-}423200 \rightarrow \textit{Scheinlösung, da Anstieg} \text{ negativ}$

d) Berechnen Sie, an welchem Tag die meisten Personen gerade erkrankt waren. Berechnen Sie weiter, wie viele Personen an diesem Tag erkrankt waren.

$A'(t) = 0$
$t_1 = 50 \quad A''(50) = \text{-}1.035 \rightarrow \text{Max}$
A(50)=590.625

e) Zeigen Sie, dass nach 80 Tagen die Epidemie vorbei war. $A(0) = 0$

1.4.2

Die über einen längeren Zeitraum erfasste durchschnittliche Anzahl A der momentanen Besucher einer Internetseiten in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitraum von 6.00Uhr morgens bis 20.00Uhr abends kann näherungsweise durch eine Ganzrationale Funktion dritten Grades mit dem Term

$A(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 520$ mit $6 \le t \le 20$ und t in Stunden beschrieben werden.

a) Berechnen Sie, wie viele Interessenten die Internetseite um 8.00Uhr durchschnittlich besuchen.

$A(8) = 128$

b) Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die Anzahl der Besucher zwischen 12.00Uhr und 13.00Uhr verändert.

$$\frac{A(13)}{A(12)} = \frac{468}{412} \approx 1{,}14 \rightarrow \textit{Zunahme um } 14\%$$

c) Berechnen Sie, um welche Uhrzeit sich die Anzahl der Besucher durchschnittlich am stärksten vergrößert. Berechnen Sie weiter, um wie viel Besucher mehr die Internetseite aufgesucht wird.

$A''(t) = 0$

$t = 10 \qquad A'(10) = 75 \rightarrow \textit{Zunahme um } 75 \textit{ Besucher}$

d) Berechnen Sie, um welche Uhrzeit durchschnittlich die meisten Interessenten die Internetseite besuchen. Berechnen Sie weiter, wie viele Interessenten dies durchschnittlich sind.

$A'(t) = 0$

$t_1 = 15 \quad A''(15) = \text{-}30 \rightarrow \text{Max}$

A(15)=520

Exponentialfunktionen

2.1 Ableitungen

a)
$$f(x)=e^{-2x+2}$$
$$f'(x)=(-2)e^{-2x+2}$$
$$f''(x)=(4)e^{-2x+2}$$
$$f'''(x)=(-8)e^{-2x+2}$$

b)
$$f(x)=(-0{,}15)e^{-4x+2}$$
$$f'(x)=(0{,}6)e^{-4x+2}$$
$$f''(x)=(-2{,}4)e^{-4x+2}$$
$$f'''(x)=(9{,}6)e^{-4x+2}$$

c)
$$f(x)=(3x+5)e^{-3x+4}$$
$$f'(x)=(-9x-12)e^{-3x+4}$$
$$f''(x)=(27x+27)e^{-3x+4}$$
$$f'''(x)=(-81x-54)e^{-3x+4}$$

d)
$$f(x)=(-x-1)e^{7-x}$$
$$f'(x)=(x)e^{7-x}$$
$$f''(x)=(-x+1)e^{7-x}$$
$$f'''(x)=(x-2)e^{7-x}$$

e)
$$f(x)=(-x^2+3x-5)e^{2x-5}$$
$$f'(x)=(-2x^2+4x-7)e^{2x-5}$$
$$f''(x)=(-4x^2+4x-10)e^{2x-5}$$
$$f'''(x)=(-8x^2-16)e^{2x-5}$$

f)
$$f(x)=(-0{,}5x^2-1{,}5x-2{,}5)e^{-4x+1}$$
$$f'(x)=(2x^2+5x+8{,}5)e^{-4x+1}$$
$$f''(x)=(-8x^2-16x-29)e^{-4x+1}$$
$$f'''(x)=(32x^2+48x+100)e^{-4x+1}$$

g)
$$f(x)=(-x^2-x-1)e^{-0{,}5x+2}$$
$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)e^{-0{,}5x+2}$$
$$f''(x)=\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{5}{4}\right)e^{-0{,}5x+2}$$
$$f'''(x)=\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{11}{8}x+\frac{19}{8}\right)e^{-0{,}5x+2}$$

h)
$$f(x)=\left(-2x^2+4x-8\right)e^{0{,}25x+2}$$
$$f'(x)=\left(-\frac{1}{2}x^2-3x+2\right)e^{0{,}25x+2}$$
$$f''(x)=\left(-\frac{1}{8}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{5}{2}\right)e^{0{,}25x+2}$$
$$f'''(x)=\left(-\frac{1}{32}x^2-\frac{11}{16}x-\frac{19}{8}\right)e^{0{,}25x+2}$$

i)
$$f(x)=\left(-2\right)e^{-x^2}$$
$$f'(x)=\left(4x\right)e^{-x^2}$$
$$f''(x)=\left(-8x^2+4\right)e^{-x^2}$$
$$f'''(x)=\left(16x^3-24x\right)e^{-x^2}$$

j)
$$f(x)=e^{2x^2-x}$$
$$f'(x)=\left(4x-1\right)e^{2x^2-x}$$
$$f''(x)=\left(16x^2-8x+5\right)e^{2x^2-x}$$
$$f'''(x)=\left(64x^3-48x^2+60x-13\right)e^{2x^2-x}$$

k)
$$f(x)=ae^{bx}$$
$$f'(x)=abe^{bx}$$
$$f''(x)=ab^2e^{bx}$$
$$f'''(x)=ab^3e^{bx}$$

l)
$$f(x)=e^{x}$$
$$f'(x)=e^{x}$$
$$f''(x)=e^{x}$$
$$f'''(x)=e^{x}$$

2.2 Kurvendiskussion (Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Symmetrie- &Globalverhalten)

a)

$f(x)=(8x)e^{-x}$

$S_Y(0|0)\quad x_{N1}=0$

$H_1(1|2,94)$

$W_1(2|2,17)$

keine Symmetrie

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b)

$f(x)=e^{-x^2+4x}$

$S_Y(0|1)$ *keine Nullstellen*

$H_1(-2|54,60)$

$W_1(-2,71|33,11)\quad W_2(-1,30|33,11)$

keine Symmetrie

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

c)

$f(x)=(2x)e^{1-x}$

$S_Y(0|0)\quad x_{N1}=0$

$H_1(1|2)$

$W_1(2|1,47)$

keine Symmetrie

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

d)

$f(x)=(x+2)e^{1-4x}$

$S_Y(0|2e)\quad x_{N1}=-2$

$H_1(-1,75|745,24)$

$W_1(-1,5|548,32)$

keine Symmetrie

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

e)

$f(x)=(x)e^{1-x^2}$

$S_Y(0|0)\quad x_{N1}=0$

$T_1(-0,71|-1,17)\quad H_1(0,71|1,17)$

$W_1(-1,22|-0,74)\quad W_2(0|0)\quad W_2(1,22|0,74)$

symmetrisch zum Ursprung

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

f)

$f(x)=e^{1-x^2}$

$S_Y(0|e)$ *keine Nullstellen*

$H_1(0|e)$

$W_1(-0,71|1,65)\quad W_2(0,71|1,65)$

symmetrisch zur $y-$Achse

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

g)

$f(x)=(x^2-4)e^{-2x}$

$S_Y(0|-4)\quad x_{N1}=-2\quad x_{N2}=2$

$T_1(-1,56|-35,47)\quad H_1(2,56|0,02)$

$W_1(-1,12|-25,83)\quad W_2(3,12|0,01)$

keine Symmetrie

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

h)

$f(x)=(2x\text{-}4)e^{0,5x}$

$S_Y(0|2)\quad x_{N1}=2$

$T_1(0|4)$

$W_1(-2|-2,94)$

keine Symmetrie

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

2.3 Konstruktionsaufgaben

a) Berechnen Sie die Funktion der Art $f(x)=ae^{bx}$, so dass die Punkte $A(0|3)$ und $B(5|2)$ auf dem Graphen liegen.

$$f(x)=3e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right)x}$$

b) Eine Funktion der Form $f(x)=ae^{bx}$ ist gesucht. Die Gerade $y=2x-1$ ist Tangente an der Stelle $x=1$. Berechnen Sie a und b.

$$y=2(1)-1=1$$
$$f(1)=1=ae^{b(1)}$$
$$f'(1)=2=abe^{b(1)}$$

$$a=\frac{1}{e^b}$$
$$2=\frac{1}{e^b}be^b$$

$$a=\frac{1}{e^2}$$
$$b=2$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{e^2}\right)e^{2x}$$

c) Gesucht ist eine Funktion in der Form $f(x)=ae^{bx}$, deren Graph im Punkt $P(2|1)$ die Steigung 3 hat.

$$f(2)=1=ae^{b(2)}$$
$$f'(2)=3=abe^{b(2)}$$

$$a=\frac{1}{e^{2b}}$$
$$3=\frac{1}{e^{2b}}be^{2b}$$

$$a=\frac{1}{e^6}$$
$$b=3$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{e^6}\right)e^{3x}$$

d) Berechnen Sie die Funktion der Art $f(x)=ae^{bx}$, so dass die Punkte $A(0|1)$ und $B(1|3)$ auf dem Graphen liegen.

$$f(x)=e^{0{,}5\ln(3)x}$$

e) Die Punkte $P(-2|20)$ und $Q(3|0{,}625)$ liegen auf dem Graphen einer Exponentialfunktion der Art $f(x)=ae^{bx}$. Berechnen Sie a und b.

$$f(x)=10e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{32}\right)x}$$

f) Die Funktion $f(x)=(a+1)e^{-bx}$ geht durch den Punkt $R(1|2)$ und hat dort die Steigung $-2e$. Um welche Funktion handelt es sich? *(hoher Schwierigkeitsgrad)*

$$f(x)=(a+1)e^{-bx}$$
$$f'(x)=(-ab-b)e^{-bx}$$

$$f(1)=2=(a+1)e^{-b(1)}$$
$$f'(1)=-2e=(-b)(a+1)e^{-b(1)}$$

$$a=2e^b-1$$
$$b=e$$

$$f(x)=2e^{e-ex}$$

2.4 Verständnisfragen

Wie müsste die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion unter folgenden Bedingungen aussehen:

a) Alle 15 min verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien.

$$f(x) = 2^{\frac{1}{15}x}$$

b) Alle 30 min verdreifacht sich die Anzahl der Bakterien.

$$f(x) = 3^{\frac{1}{30}x}$$

c) Wir beginnen mit der Beobachtung, wenn schon n_0 = 1.000.000.000 Bakterien vorhanden sind und die Anzahl sich alle 45 min verfünffacht.

$$f(x) = 1.000.000.000 \cdot 5^{\frac{1}{45}x}$$

d) Bei Beobachtungsbeginn sind n_0 = 100 000 Bakterien vorhanden und alle 45 min nimmt die Anzahl der Bakterien um den Faktor e = 2,718 zu.

$$f(x) = 100.000 e^{\frac{1}{45}x}$$

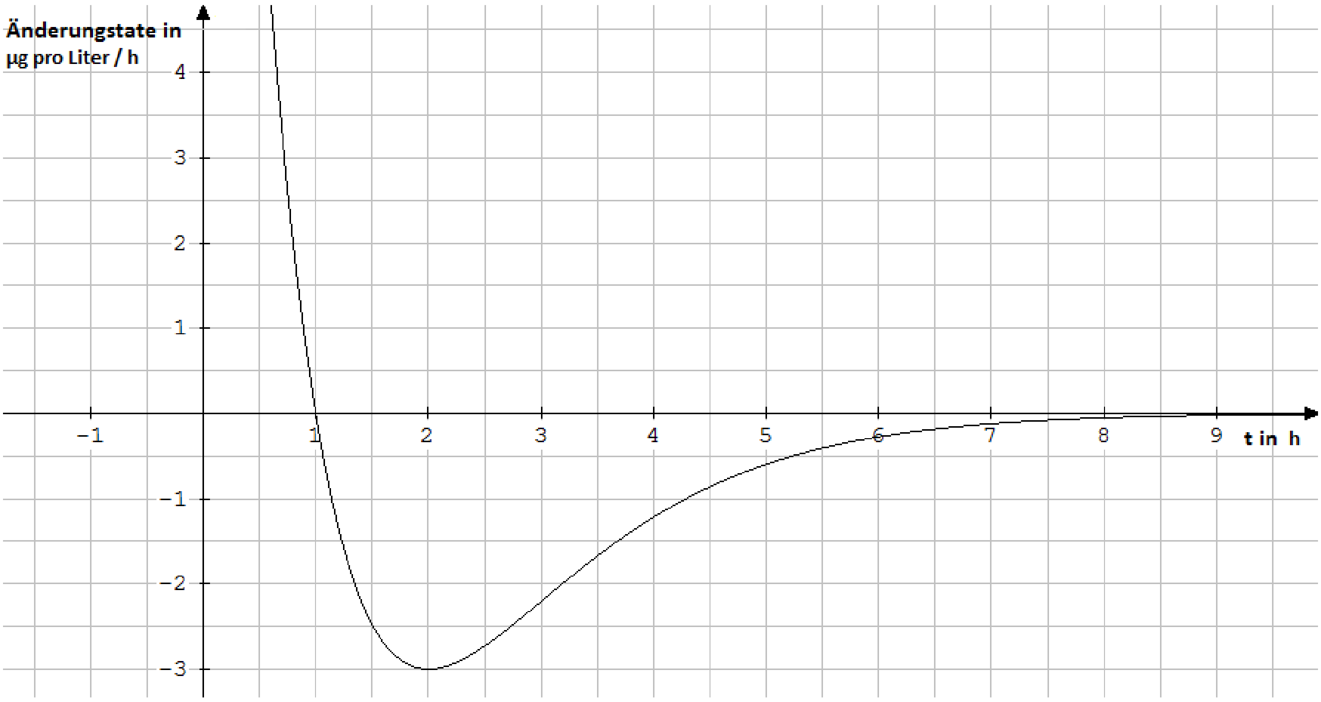
e) Alle 10 min. halbiert sich die Anzahl n_0.

$$f(x) = n_0 \cdot 2^{-\frac{1}{10}x}$$

2.5 Textaufgaben

2.5.1 Arzneimittelkonzentration

Bei einer Arznei, z.B. einer Tablette, steht die Wirkung (z.B. Schmerzlinderung o.ä.) in direktem Zusammenhang mit der Konzentration des in der Arznei enthaltenen Wirkstoffes im Blut, d.h., bei hoher Konzentration des Wirkstoffes verspürt der Patient eine intensive Wirkung. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut wird in µg pro Liter angegeben. Die nachfolgende Graphik zeigt mit $f'(x)=(-3x+3)e^{2-x}$ die Änderungsrate der Konzentration in µg pro Liter je Stunde in Abhängigkeit von der Zeit t in h. Dabei ist t die Zeit in h seit Beginn der Einnahme (x = 0).



a) Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen die Wirksamkeit zunimmt und die Zeitintervalle, in denen die Wirksamkeit abnimmt. Begründen Sie Ihre Aussagen.
Im Intervall 0 < x < 1 ist die Änderungsrate positiv, die Wirksamkeit nimmt also zu, von x > 1 bis zum Ende ist die Änderungsrate negativ, also nimmt die Wirksamkeit ab.

b) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Wirkstoffes am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.
Zum Zeitpunkt x = 1 ist die Änderungsrate 0, die Ableitungsfunktion hat dort einen Vorzeichenwechsel von + nach -, also liegt an der Stelle 1 ein Maximum der Wirksamkeit vor

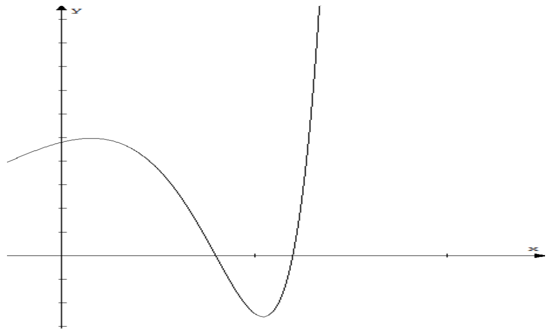
c) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Abnahme der Konzentration am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.
Die Abnahme ist am größten an der Stelle x = 2, an dieser Stelle hat die Funktion f eine Wendestelle

d) Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Wirksamkeit der Arznei.
Bis zu x = 1 nimmt die Konzentration und damit die Wirksamkeit zu, anschließend lässt die Wirksamkeit nach, bis nach 8 Stunden praktisch keine Wirkung mehr spürbar ist.

e) Erläutern Sie, was die dazugehörige Funktion $f(x)=(3x)e^{2-x}$ in diesem Zusammenhang angibt.
Die Funktion f(x) beschreibt Konzentration des Wirkstoffes im Blut (gemessen in µg pro Liter) zur Zeit x (gemessen seit der Einnahme).

2.5.2 Stausee

Ein Stausee ändert seine Wassermenge. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt. Die Zulaufratenfunktion ist gegeben durch $f(x)=\left(x^2-10x+24\right)e^{0,5x}$ .Der Graph von f ist hier abgebildet.



Dabei wird x in Tagen und z(x) in tausend Kubikmeter pro Tag angegeben. Betrachtet wird das Intervall [0;6,5], d.h.: $0 \le x \le 6,5$.

Hinweis: Eine negative Zulaufrate bedeutet, dass Wasser aus dem Stausee herausläuft.

a) Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen das Wasser weder ein- noch abfließt. Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft.

Da eine negative Zulaufrate bedeutet, dass Wasser herausläuft, werden bei diesem Aufgabenteil die Nullstellen der Funktion z gesucht. Bis zum vierten Tag einschließlich fließt Wasser zu; am fünften und sechsten Tag fließt Wasser ab; nach dem sechsten Tag fließt wieder Wasser zu.

Zulauf: $0<x<4$ *und* $x>6$ *Ablauf:* $4<x<6$

b) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Zulaufrate im betrachteten Intervall maximal ist.

$f'(x)=0 \quad und \quad f''(x)<0 \quad führt\ zu: \ x=3-\sqrt{5}$

Wegen $f(6,5)=32,24>f(3-\sqrt{5})=24,83$ *ist die Zulaufrate am Rand des Intervalls bei* $x=6,5$ *maximal.*

c) Ermitteln Sie, welche Aussagen über die Änderung der Wassermenge zum Zeitpunkt $x=5$ möglich sind.

$f(5)=-e^{2,5}<0$. *Zum Zeitpunkt* $x=5$ ist die Zulaufrate negativ, das heißt, dass aus dem Stausee Wasser herausläuft.